Présentation du workshop

① Motivation

Plusieurs espaces de modules sont naturellement munis de structure symplectique ou de Poisson.

|| définition : 2-forme fermée non-dégénérée (i.e. $T_X \xrightarrow{\sim} \Omega^1_X$)

condition linéaire (être fermé : $d\omega = 0$)

$\subset$

|| définition : crochet de Poisson (= Lie + bi-dérivation) sur l'algèbre des fonctions ($\Leftrightarrow \pi \in \Gamma(\Lambda^2 T_X)$ t.q. $[\pi,\pi]_{SN} = 0$)

condition quadratique (équation de M.C.)

Deux exemples :

① variétés de caractères

* Σ surface compacte sans bord

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), GL_N)/GL_N$$

admet une structure symplectique

Atiyah-Bott

$\mathrel{\rotatebox{90}{$\subset$}}$ espace de modules des connexions plates

* $\mathring{\Sigma}$ surface compacte avec 1 composante de bord.

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathring{\Sigma}), GL_N)/GL_N$$

admet une structure de Poisson

Fock-Rosly

Remarque : $\pi_1(\mathring{\Sigma})$ est un groupe libre à $2g$ générateurs.

$\mathring{\Sigma} =$ 

$$\pi_1(\mathring{\Sigma}) = \langle A_1,\dots,A_g, B_1,\dots,B_g, C\rangle \Big/ \overrightarrow{\prod_{i=1,\dots,g}} (A_i,B_i) = C$$

$$\simeq \langle A_i, B_i \mid i=1,\dots,g\rangle$$

Par conséquent $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathring{\Sigma}), GL_N) \simeq GL_N^{2g}$ ← c'est un ouvert d'une variété de caractères !

② Schéma de Hilbert

$\mathbb{C}^{2n}$ est symplectique : $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$

$\mathbb{C}^{2n}/\mathfrak{S}_n$ est une variété singulière "symplectique" (la structure symplectique existe sur l'ouvert lisse)

Fait (pas facile) : il existe une résolution de singularité
$$\begin{array}{c} \mathrm{Hilb}_n(\mathbb{C}^2) \\ \downarrow p \\ \mathbb{C}^{2n}/\mathfrak{S}_n \end{array}$$
qui est symplectique.

Construction de $\mathrm{Hilb}_n(\mathbb{C}^2)$:

$$\left\{ (X,Y,v) \mid X,Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\ v \in \mathbb{C}^n,\ [X,Y]=0,\ \mathbb{C}\langle X,Y\rangle \cdot v = \mathbb{C}^n \right\} / GL_n$$

$\downarrow$ $\mathbb{C}^{2n}/\mathfrak{S}_n$

spectre joint de X et Y

C'est encore une variété de carquois ! C'est un espace de module de représentations de l'algèbre préprojective de  .

Remarque : ici n ne joue aucun rôle !!!

$\boxed{\text{QUESTION}}$ peut-on comprendre directement sur une algèbre A les structures géométriques qui apparaissent sur la variété de ses représentations ?

symplectiques, Poisson, etc...

② Calcul différentiel non-commutatif

structures algébriques sur A	structures géométriques sur $\mathrm{Rep}(A,n)$
$A/[A,A] \ni [a] \longmapsto$	$\mathrm{tr}(a\cdot)$ fonctions
Karoubi-de Rham, dérivations doubles (exposé 1)	formes, complexe de de Rham, champs de vecteurs
structures bi-symplectiques (exposé 2)	forme symplectique
structures double Poisson (exposé 3)	structures de Poisson

③ Au-delà des structures double Poisson

* retour sur les variétés de caractères

$(A,B,C) \longmapsto \mathrm{tr}\,([A,B]C)$ définit un élément de $(\Lambda^3 \mathfrak{gl}_n^*)^{GL_n} \simeq (\Lambda^3 \mathfrak{gl}_n)^{GL_n} \ni Z$.

Le bivecteur de Poisson de $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathring{\Sigma}), GL_N)/GL_N$ se relève en un bivecteur sur $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathring{\Sigma}), GL_N) \simeq GL_N^{2g}$.

Mais $[\pi,\pi] = \vec{Z}$. C'est ce qu'on appelle une structure quasi-Poisson.

Celle-ci vient avec une application $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathring{\Sigma}), GL_N) \xrightarrow{\mu} GL_N$

$$(A_1,\dots,A_g,B_1,\dots,B_g) \longmapsto C$$

Remarque : on retrouve la variété de caractères de la surface fermée Σ

par réduction : $\mu^{-1}(1)/G$

Tout ceci se lit directement sur $k[\pi_1(\mathring{\Sigma})]$, qui possède une structure quasi-double-Poisson exposé 4.

→ exposé 5 (Travaux de Massuyeau-Turaev)

* histoire similaire pour le schéma de Hilbert

$$\{(X,Y,v,\xi) \mid X,Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\ v \in \mathbb{C}^n,\ \xi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}\} \simeq T^*(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n)$$

est symplectique.

$$\Big\downarrow \mu \quad \text{application moment}$$

$$[X,Y] + v\cdot\xi$$

$\mu^{-1}(0)^{st}/GL_n$ symplectique également.

* linéarisation

$$\mathrm{Flat}_N(\dot{\Sigma}) \longrightarrow [\mathfrak{g}/G] \quad \text{vs} \quad \mathrm{Loc}_N(\mathring{\Sigma}) \longrightarrow [G/G]$$

pas quasi quasi

Au niveau NC (purement algébrique), cette linéarisation se lit également avec des structures doubles. (Travaux de Naef). Exposés 6 et 7 ??? (lien avec KV)

* la dimension supérieure ?

4 Géométrie dérivée

Approche concurrente. Etant donnée une (dg-)algèbre voire une dg-catégorie, on peut s'intéresser à l'espace de modules des complexes de représentations à quasi-iso près.

Toën-Vaquié : $Perf_A$ (champ dérivé) Beaucoup plus général !!!

⚠ Si on se restreint aux complexes concentrés en degré 0 (avec dimension fixée) on ne retrouve pas nécessairement $Rep(A,n)/GL_n$ MAIS $DRep(A,n)/GL_n$.

exposé 8

→ Pantev-Toën-Vaquié-Vezzosi + Toën + Brav-Dyckerhoff.

Si A est (n-) Calabi-Yau, alors $Perf_A$ est (2-n)-symplectique.

exposé 9 : structures de Poisson NC dérivées et Calabi-Yau.
sur DRep

2-Calabi-Yau dans le complexe de Karoubi-de Rham ressemble aux structures bi-symplectiques (si algèbre lisse).

→ en topologie des cordes de dim n on tombe naturellement sur des structures n-CY.

⇒ on obtient naturellement des structures (double Poisson) (n-2)-décalées

Exposés 6 et 7 ???

E

5 Bouquet final (Exposés 10-11-12)

→ pre-CY généralise CY de la même manière que (double) Poisson généralise (bi)symplectique.

défini par une équation de MC

défini par une condition de fermeture + propriété de ND.

→ pre-CY donne du Poisson sur les espaces de modules de Rep.

Remarque : on suspecte que ça marche pour Perf. Mais non-démontré à ma connaissance.

→ pre-CY et double Poisson sont liés !

monde dérivé

à homotopie près.

6 Comment quantifie-t-on ?

Pose la question (non abordée dans ce workshop).