

# Présentation du workshop

## ① Motivation

Plusieurs espaces de modules sont naturellement munis de structure symplectique ou de Poisson.

II définition  
 2-forme fermée  
 non-dégénérée  
 (i.e.  $T_x \xrightarrow{\sim} \Omega^1_x$ )  
 condition linéaire  
 (être fermé:  $dw=0$ )

II définition  
 crochet de Poisson (= Lie + bi-dérivation)  
 sur l'algèbre des fonctions  
 ( $\Leftrightarrow \pi \in T^*/\Lambda^2 T_x$  t.q.  $[\pi, \pi]_{SN} = 0$ )  
 condition quadratique  
 (équation de M.C.)

## Deux exemples:

### ① variétés de courbes

\*  $\Sigma$  surface compacte sans bord

$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), GL_N) / GL_N$   
 espace de modules  
 des connexions plates

admet une structure symplectique

Atiyah-Bott

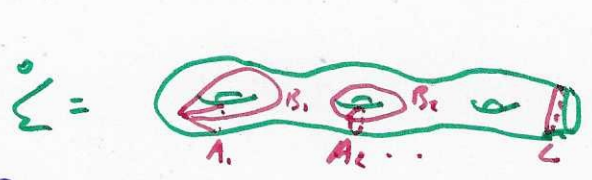
\*  $\dot{\Sigma}$  surface compacte avec 1 composante de bord.

$\text{Hom}(\pi_1(\dot{\Sigma}), GL_N) / GL_N$

admet une structure de Poisson

Fock-Rosly

Remarque:  $\pi_1(\dot{\Sigma})$  est un groupe libre à  $2g$  générateurs.



$$\pi_1(\dot{\Sigma}) = \langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C \rangle / \prod_{i=1}^g (A_i B_i) = C$$

Par conséquent  $\text{Hom}(\pi_1(\dot{\Sigma}), GL_N) \simeq GL_N^{2g}$  c'est un ouvert d'une variété de caractères!

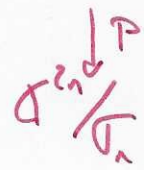
## ② Schema de Hilbert

$\mathbb{C}^{2n}$  est symplectique :  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$

$\mathbb{C}^n / \Delta_n$  est une variété singulière "symplectique". (la structure symplectique existe sur l'ouvert lisse)

Fait (pas facile) : il existe une résolution de singularité  $Hilb_n(\mathbb{C}^2)$

qui est symplectique.



### Construction de $Hilb_n(\mathbb{C}^2)$ :

$$\left\{ (X, Y, v) \mid X, Y \in Mat_n(\mathbb{C}), v \in \mathbb{C}^n, [X, Y] = 0, \langle X, Y \rangle \cdot v = \mathbb{C}^n \right\} / GL_n$$

↓  
Spectre joint de X et Y



(c'est encore une variété de carquois ! (c'est un espace de module de représentations de l'algèbre préprojective de  $\mathbb{C}^2$ .)

Remarque : ici n ne joue aucun rôle !!!

### QUESTION

peut-on comprendre directement sur une algèbre A les structures géométriques qui apparaissent sur la variété de ses représentations ?  
Symplectiques, Poisson, etc...

## ② Calcul différentiel non-commutatif

Structures algébriques sur A	Structures géométriques sur $Rep(A, n)$
$A/[A, A] \ni [a] \mapsto tr(a)$	fonctions
Karoubi-de Rehm, covecteurs doubles (exposé 1)	formes, complexe de de Rham, champs de vecteurs
structures bi-symplectiques (exposé 2)	forme symplectique
structures double Poisson (exposé 3)	structures de Poisson

### ③ Au-delà des structures double Poisson

\* retour sur les variétés de caractères

$(A, B, C) \mapsto \text{tr}(A, B, C)$  définit un élément de  $(\mathbb{A}^3 \mathfrak{gl}_n^*) \simeq (\mathbb{A}^3 \mathfrak{gl}_n) \cong \mathbb{A}^3$ .

Le bivecteur de Poisson de  $\text{Hom}(\pi, \mathbb{A}^1, \text{GL}_n) / \text{GL}_n$  se relève en un bivecteur sur  $\text{Hom}(\pi, \mathbb{A}^1, \text{GL}_n) \simeq \text{GL}_n^{\times 2}$ .

Mais  $[\pi, \pi] = \mathbb{Z}$ . (C'est ce qu'on appelle une structure quasi-Poisson.)

Celle-ci va avec une application  $\text{Hom}(\pi, \mathbb{A}^1, \text{GL}_n) \xrightarrow{\mu} \text{GL}_n$   
 $(A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g) \mapsto C$

Remarque : on retrouve la variété de caractères de la surface fermée  $\Sigma$

$L$  par réduction :  $\mu^{-1}(1) / G$

Tout ceci se lit directement sur  $\mathbb{A}^3(\pi, \mathbb{A}^1)$ , qui possède une structure

quasi-double-Poisson

exposé 4.

→ exposé 5

(Travaux de Poincaré - Turaev)

\* histoire similaire par le schéma de Hilbert

$\{(X, Y, v, \xi) \mid X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}), v \in \mathbb{C}^n, \xi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}\} \simeq T^*(\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n)$   
 est symplectique.

$\mu$  application moment

$[X, Y] + v \cdot \xi$

$\mu^{-1}(0)^{st} / \text{GL}_n$  symplectique également.

\* linéarisation

$\text{Flat}_n(\Sigma) \rightarrow [\mathfrak{g}/G]$  vs  $\text{Loc}_n(\Sigma) \xrightarrow{\text{quasi}} [G/G]$   
 pas quasi

Au niveau NC (purement algébrique), cette linéarisation se lit également avec des structures doubles. (Travaux de Naef). Exposés 6 et 7 ??? (lien avec kv)

\* la dimension supérieure ?

D

## ④ Géométrie dérivée

Approche concrète. Etant donnée une (dg-)algèbre voire une dg-catégorie, on peut s'intéresser à l'espace de modules des Complexes de représentations à quasi-iso près.

Toën-Vaquié:  $\text{Perf}_A$  (champ dérivé) Beaucoup plus général!!!

⚠ Si on se restreint aux complexes concentrés en degré 0 (avec dimension finie) on ne retrouve pas nécessairement  $\text{Rep}(A, n)/\text{GL}_n$  mais  $\text{DRep}(A, n)/\text{GL}_n$ .

Exposé 8

→ Porter-Toën-Vaquié-Vezzosi + Toën + Brou-Dyckerhoff.

Si  $A$  est (n-) Calabi-Yau, alors  $\text{Perf}_A$  est  $(2-n)$ -symplectique.

Exposé 9: Structures de Poisson NC dérivées et Calabi-Yau.  
sur  $\text{DRep}$

2-Calabi-Yau  
dans le complexe  
de Kuranishi-de Rham  
ressemble aux  
structures bi-symplectiques  
(si algèbre fixe).

→ En topologie des cordes de dim  $n$  on tombe naturellement sur des structures  $n$ -CY.

⇒ on obtient naturellement des structures (double Poisson)  $(n-2)$ -décalées  
Exposés 6 et 7 ???

## (5) Bouquet final (Expos 10-11-12)

LE

→ pre-CY généralise CY de la même manière que  
(double) Poisson généralise (bi)symplectique.

défini par une  
équation de MC

défini par une condition de fermeture  
+ propriété de MD.

→ pre-CY donne du Poisson sur les espaces de modules de Rep.

Remarque : on suspecte que ça marche pour Pof. Mais non démontré  
L à ma connaissance.

→ pre-CY et double Poisson sont liés !  
monde de  $\mathbb{C}$  à homotopie près.

## (6) Comment quantification ?

Pose la question (non abordée dans ce workshop).