Exposé #12 — Guillaume

« Les algèbres pré-Calabi-Yau sont des gèbres de Poisson double courbées à homotopie près »

Plan

I. alg. pré-Calabi-Yau (courbées)

encodées par une opérade cyclique

II. gèbres de Poisson double (courbées) à hom près

encodées par une propérade

III. Ce sont les mêmes !

[Note : on laisse tomber le courbé, je le reprendrai seulement à la fin.]

I. Pré-Calabi-Yau

Déf : Un module cyclique $M = \{M(\langle n \rangle)\}_{n \geq 1}$ est une famille d'espaces vectoriels dg munis d'une action des groupes cycliques C_n, $n \geq 1$.

[on pense aux éléments de $M(\langle n \rangle)$ comme des étoiles planaires à n rayons, modulo rotation = action du groupe cyclique]

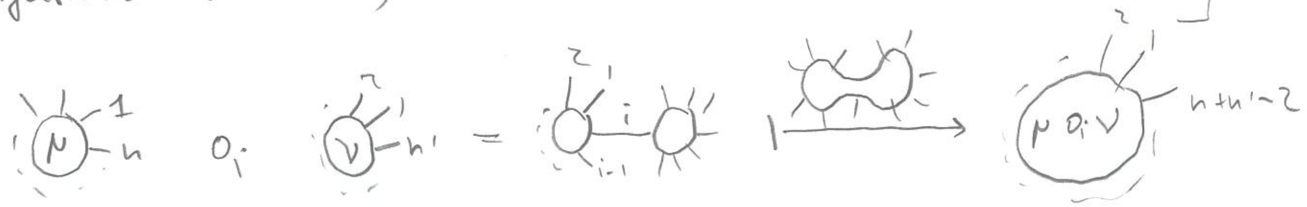
Déf : Une opérade cyclique ns est un module cyclique $\mathcal{P}$ muni d'opérations de compositions partielles

$$\circ_i : \mathcal{P}(\langle n \rangle) \otimes \mathcal{P}(\langle n' \rangle) \longrightarrow \mathcal{P}(\langle n+n'-2 \rangle)$$

pour $n \geq 2$, $n' \geq 1$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

vérifiant des conditions d'associativité et d'équivariance par rapport à l'action des gr cycliques.

On pense à $\mathcal{P}(\langle n\rangle)$ comme à l'espace des opérations "abstraites" d'arité n et aux $\circ_i$ comme à la composition "abstraite" de ces dernières. On se le représente par la ~~gr~~ greffe des étoiles planaires (ou encore "fusion des amibes")



On va s'intéresser aux représentations de $\mathcal{P}$, qui seront des espaces vectoriels concrets avec une structure héritée de $\mathcal{P}$ et des vraies opérations

Exemples

(i) $As(\langle 1\rangle) = As(\langle 2\rangle) = 0$

$As(\langle n\rangle) := \mathbb{k}\,\mu_n \,,\ n \geq 3 \,,\ |\mu_n| = 0$

Action triviale de C_n

Compositions partielles $\mu_n \circ_i \mu_{n'} := \mu_{n+n'-2}$

(ii) Soit $V \in dgVect$ muni d'une forme bil. sym. de deg 0

$End(\langle n\rangle) := V^{\otimes n} \quad , n \geq 1$

$(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \circ_i (b_1 \otimes \dots \otimes b_{n'}) := \pm \langle a_i, b_1\rangle\, a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_{n'} \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n$

L'action de C_n est celle que vous imaginez.

Déf : Un morphisme d'opérades ns est un mor de modules cycliques qui préserve la structure (les $\circ_i$).

Déf : Soit $V \in dgVect$ muni d'une forme bil. sym., et $\mathcal{P}$ une opérade cyclique ns. Une structure de $\mathcal{P}$-alg sur V est un morphisme d'opérades

$$\mathcal{P} \longrightarrow End_V$$

exemple As-alg = alg ass dg $(V, d_V, \cdot)$, avec forme $\langle\, ,\rangle$ qui vérifie $\langle a\cdot b, c\rangle = \langle a, b\cdot c\rangle$ $\forall a,b,c \in A$.

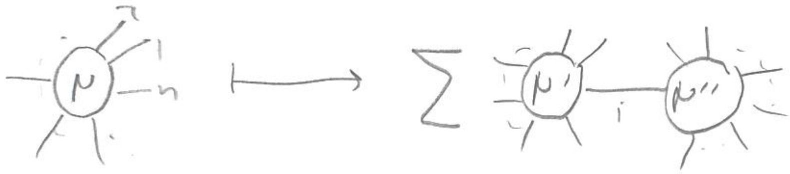
[On a une notion duale de coopérade cyclique]

Déf : Une coopérade cyclique ns $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}(\langle n\rangle)\}_{n\geq 1}$ est un module cyclique muni d'applications de décomposition partielles

$$\delta_i : \mathcal{C}(\langle n+n'-2\rangle) \longrightarrow \mathcal{C}(\langle n\rangle)\otimes \mathcal{C}(\langle n'\rangle)$$

$\forall\, n\geq 2$, $n'\geq 1$, et $i\in\{1,..,n\}$, qui vérifient des conditions de coassociativité et d'équivariance p/r à l'action des gr cycliques.

[On se représente la décomposition comme la somme sur toutes les manières d'éclater une étoile planaire en 2]



exemples

(i) $As^i(\langle 1\rangle) = As^i(\langle 2\rangle) = 0$

$As^i(\langle n\rangle) := \Bbbk\nu_n$, $n\geq 3$, $|\nu_n| = n-2$

Action signature de C_n

$$\delta_i(\nu_{n+n'-2}) := \pm\, \nu_n \otimes \nu_{n'}$$

(ii) Si une opérade cyc. ns est de dim finie en chaque arité, alors les duaux linéaires de ces espaces forment une coopérade cyc. n.s.

[On s'intéresse maintenant à une version "à homotopie près" de ces structures — car elles se comportent mal vis-à-vis de la théorie de l'homotopie
Motto (Pridham–Lurie) : "tout problème de déformation est encodé par une alg de Lie dg]

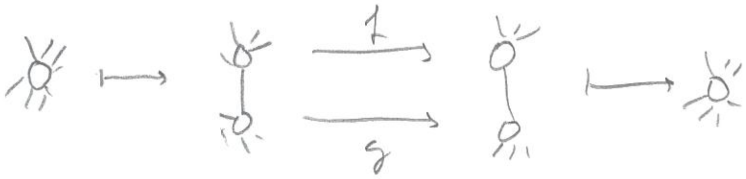
Déf: Soient $\mathcal{P}$ une opérade cyc. et $\mathcal{C}$ une coop. cyclique.
Leur <u>algèbre de convolution</u> est l'alg de Lie dg

$$\widehat{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{P}) := \left(\prod_{n\geq 1} \mathrm{Hom}_{C_n}(\mathcal{C}((n)), \mathcal{P}((n))), \partial, \{-,-\}\right)$$

où ∂ est défini sur les Hom par $\partial(f) = d_{\mathcal{P}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{\mathcal{C}}$

et $\{f,g\} := \sum_{i=2}^{n} \circ_i (f \otimes g)\, \delta_i - (-1)^{|f||g|} \sum_{j=2}^{n'} \circ_j (g \otimes f)\, \delta_j$

[en dessin]



[rem: Ce crochet provient de l'antisymétrisation du produit pré-Lie usuel sur la totalisation d'une opérade — les Hom en forment une !]

Déf: Un Maurer-Cartan dans $\widehat{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{P})$ est appelé <u>morphisme tordant</u>, on note $\mathrm{Tw}(\mathcal{C},\mathcal{P})$

<u>Dualité de Koszul</u>

i) $\mathcal{P}$ opérade quad $\longmapsto \mathcal{P}^{¡}$ coop. quad. [on lui associe, sa duale de Koszul]

ii) $\mathcal{P}$ est de Koszul $\Rightarrow \mathrm{Tw}(\mathcal{P}^{¡}, \mathrm{End}_V)$ [condition homologique] sont les $\mathcal{P}_\infty$-alg ou $\mathcal{P}$-alg à homotopie près sur V [structure "minimale" et explicite]

j'ai une résolution q-libre de $\mathcal{P}$ qui donne les $\mathcal{P}_\infty$-alg

$$\begin{tikzcd} \Omega\mathcal{P}^{¡} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, dashed] & \mathcal{P} \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \end{tikzcd}$$

Prop: L'opérade As est de Koszul.

Déf: Une <u>A_∞-alg cyclique</u> est un $\alpha \in \mathrm{Tw}(As^{¡}, \mathrm{End}_V)$

Prop: Une <u>A_∞-alg cyclique</u> est un $V \in$ dgVect muni d'opérations

$m_n : V^{\otimes n} \longrightarrow V$, $n \geq 2$, $|m_n| = n-2$ vérifiant

$\partial(m_n) = \sum_{p+q+r=n} \pm\, m_{p+1+r} \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes m_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r})$, équipée d'une forme

bilin. sym. $\langle -,- \rangle$ non-dégénérée satisfaisant

$$\langle v_1, m_n(v_2,\dots,v_{n+1})\rangle = \pm \langle v_{n+1}, m_n(v_1,\dots,v_n)\rangle$$

[C'est donc une alg. associative à homotopie près dont les opérations supérieures vérifient une condition d'équivariance]

exemple capital

$$V = A \oplus A^*, \quad \langle x, f \rangle := f(x)$$

Proposition : L'algèbre de convolution associée est donnée par

$$\mathrm{Hom}(As^i, \mathrm{End}_{A\oplus A^*}) = \prod_{N\geq 3} \left((A\oplus A^*)^{\otimes N}\right)^{C_N}$$

$$\cong \underbrace{\prod_{N\geq 3} \left[\bigoplus_{1\leq m\leq N} \left(\bigoplus_{\lambda_1+\dots+\lambda_m = n} A\otimes (A^*)^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes A \otimes (A^*)^{\otimes \lambda_m} \right)^{C_m} \right.}\left. \bigoplus \left((A^*)^{\otimes N}\right)^{C_N} \right]$$

où $n := N-m$ et où le crochet est donné par

$$\{a_1\otimes\dots\otimes a_N, b_1\otimes\dots\otimes b_{N'}\} = \sum_{i=1}^{n} \pm \langle a_i, b_1\rangle a_1\otimes\dots\otimes a_{i-1}\otimes b_2\otimes\dots\otimes b_{n'}\otimes a_{i+1}\otimes\dots\otimes a_n$$

$$- \sum_{j=1}^{n'} \pm \langle b_j, a_1\rangle b_1\otimes\dots\otimes b_{j-1}\otimes a_2\otimes\dots\otimes a_n\otimes b_{j+1}\otimes\dots\otimes b_{n'}$$

[As^i est vide en chaque arité $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{C_n}(As^i(n), (A\oplus A^*)^{\otimes m}) \cong (A\oplus A^*)^{\otimes n}$]

On note $\mathfrak{necl}_A$ la ss-alg de Lie ___

Remarque cruciale / définition :

[Le crochet de Lie sur $\mathfrak{necl}_A$ se scinde en 2, selon que l'on applique $\langle -, - \rangle$ à $f\otimes x$ ou à $x\otimes f$, pour $f\in A^*$ et $x\in A$.]

On note $X * Y$ la composante de $\{X, Y\}$ qui est faite des applications $\langle f, x\rangle$ pour $f\in A^*$ qui vient de X et $x\in A$ qui vient de Y

$$\Longrightarrow \{X, Y\} = X*Y - (-1)^{|X||Y|} Y*X \quad \Longrightarrow \quad * \text{ est Lie-admissible.}$$

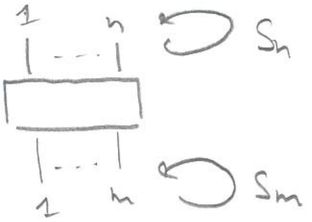
Déf : Une algèbre pré-Calabi-Yau est un élément de Maurer-Cartan dans nec_A.

II. Double Poisson

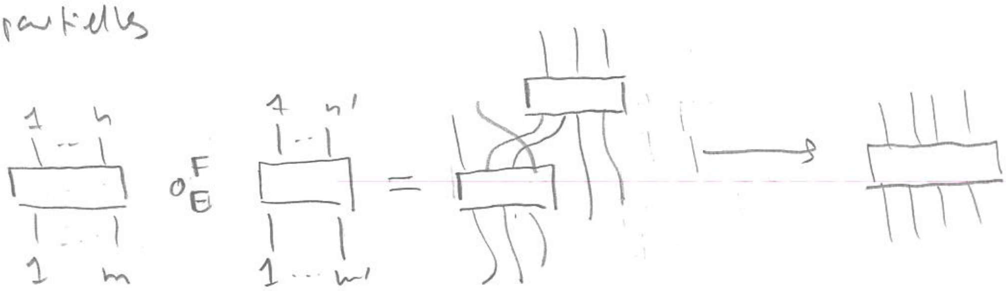
[Une propérade est une opérade où les opérations ont plusieurs entrées et plusieurs sorties]

Déf : Un $\mathbb{S}$-bimodule $M = \{M(m,n)\}_{m,n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'espaces vectoriels dg munis d'actions compatibles de S_m à gauche et de S_n à droite.

[On pense aux éléments de $M(m,n)$ comme à des boîtes à m sorties et n entrées (non planaires)]



Déf : Une propérade $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{S}$-bimodule $\mathcal{P}$ muni d'applications de compositions partielles



$\forall E \subseteq \{1,\dots,n\}$, $F \subseteq \{1,\dots,m'\}$,

qui vérifient des conditions d'associativité et d'équivariance p/r à l'action des gr symétriques.

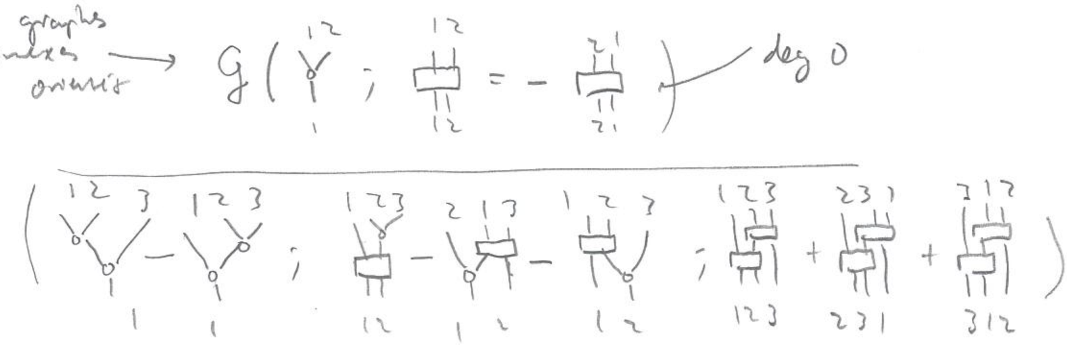
exemple

$$\mathrm{End}_A(m,n) := \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A^{\otimes m})$$

[$f \circ_i^j g$ = je compose la j^e sortie de g à la i^e entrée de f]

Déf :

DPois ::= graphes connexes orientés $\longrightarrow$ $\mathcal{G}$(…) deg 0



7

Déf : Une structure de $\mathbb{P}$-gèbre sur A est un morphisme de propérades $P \to \mathrm{End}_A$.

Prop : Les DPois-gèbres sont les gèbres double-Poisson [au sens où on les a défini + tôt]

Comme dans le cas des opérades :

i) On a une notion de copropérade [éclatement des boîtes]

ii) P prop. quad $\mapsto P^{¡}$ coprop. quad [sa duale de Koszul]

iii) P de dim finie en chaque arité $\Rightarrow P^*$ copropérade

iv) P de Koszul (condition homologique) $\Rightarrow P_\infty$-gèbre [bon notion, explicite]

Déf : Alg. de convolution propéradique [⚠ pas de gèbre libre ! Choses + subtiles !]

$$\widehat{\mathrm{Hom}}(C,P) := \left(\prod_{m,n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{Hom}_{S_m^{op}\times S_n}\big(C(m,n),P(m,n)\big), \partial, \star\right)$$

où ∂ est induite par les différentielles de C et P, et où $f \star g$ est donné par la composition

$$C \xrightarrow{\Delta} C \boxtimes C \xrightarrow{f\boxtimes g} P \boxtimes P \xrightarrow{\gamma} P$$

"produit de composition connexe" infinitésimal

⚠ Le produit $\star$ est seulement Lie-admissible [≠ opérades !]

Déf : Un Maurer-Cartan est un élément α de deg -1 qui vérifie $\partial\alpha + \alpha\star\alpha = 0$.

[On ~~souhaite~~ cherche une bonne notion homotopique de dble Poisson]

THM [Leray] : DPois est de Koszul

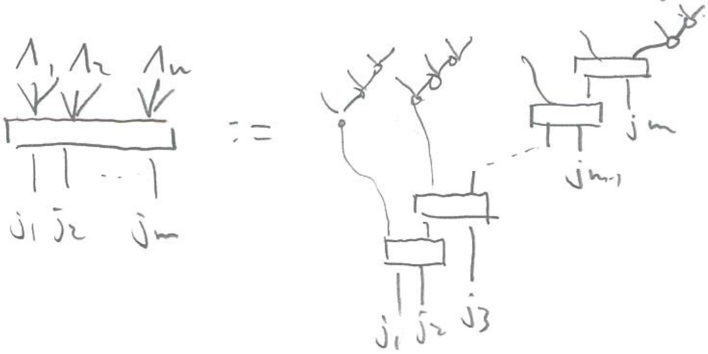
Déf : Une DPois_∞-gèbre est un Maurer-Cartan dans

$$\mathrm{dPois}_A := \widehat{\mathrm{Hom}}(\mathrm{DPois}^{¡}, \mathrm{End}_A) \quad \text{pour un } A \in \mathrm{dgVect}.$$

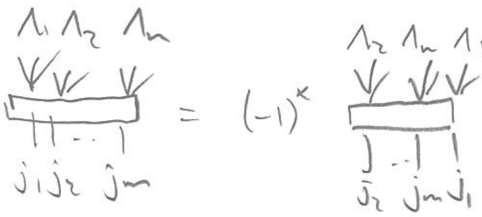
[Il ns reste donc à comprendre DPoisi, pour comprendre ce qu'est une telle gèbre]

On note $Part_m(n)$ les partitions ordonnées $\lambda_1+\dots+\lambda_m=n$

Prop: DPoisi est concentrée en arités (m,n), $n\geq m\geq 1$, et sa base



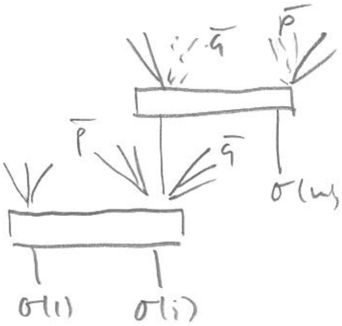
[on bouge tout le monde en bloc, cycliquement]



est décorée par $(S_m\times S_n\times Part_m(n))/C_m$, i.e.

L'image sous la décomposition est

$\longmapsto \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in C_m}\sum_{p,q}\pm$



THM: Une gèbre dble Poisson à homotopie près c'est un $A\in dgVect$ muni d'opérations

$$m_{\langle\lambda_1,\dots,\lambda_m\rangle}: A^{\otimes n}\longrightarrow A^{\otimes m} \quad \text{de deg } n-2$$

$\forall\ \lambda_1+\dots+\lambda_m=n$, $n\geq 1$, satisfaisant

1) $m_{\langle\lambda_2,\dots,\lambda_m,\lambda_1\rangle}=\pm\,\tau_m^{-1}\, m_{\langle\lambda_1,\dots,\lambda_m\rangle}\,\tau_{\lambda_1,\dots,\lambda_m}$ ← permutation cyclique des blocs

2) $\partial\left(m_{\langle\lambda_1,\dots,\lambda_m\rangle}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma\in C_m}\sum_{p,q}\pm\,\sigma^{-1}\left(m_{\langle\lambda_{\sigma(1)}\dots\lambda_{\sigma(i-1)}-p+1+q\rangle}\circ_j^1 m_{\langle\lambda_{\sigma(i)}-p\dots\lambda_{\sigma(m)}-q\rangle}\right)$

rem: On retrouve comme cas particuliers plusieurs notions présentes dans la littérature (Schedler, dble Poisson shifted algebra, Yeung, Pridham ~~n-shifted~~ dble Poisson n-dicelles)

III. Unification

On a défini les 2 alg Lie-admissible

pré-Calabi-Yau — dble-Poisson

$$\mathrm{dPois}_A = (\widehat{\mathrm{Hom}}(\mathrm{DPois}^{!}, \mathrm{End}_A), \partial, \circledast)$$

$$\mathrm{nec}k_A = \left(\left(\prod_{N \geq 3} \left(\bigoplus_{1 \leq m \leq N} \left(\bigoplus_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = n} A \otimes (A^*)^{\otimes \lambda_1} \otimes \cdots \otimes A \otimes (A^*)^{\otimes \lambda_m} \right)^{C_m} \right) \right), \partial, \star \right) \subseteq \widehat{\mathrm{Hom}}(\mathrm{As}^{!}, \mathrm{End}_{A \oplus A^*})$$

[on plonge la pté de ce nouveau complexe via le suivant.]

via
$$\begin{array}{ccc} (A^*)^{\otimes n} \otimes A & & f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \otimes a \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) & & (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) a) \end{array}$$

$$\mathrm{hlh}_A := \left(\prod_{k \geq 1} \left(\bigoplus_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k} \mathrm{Hom}_{C_k} \left(\bigotimes_{i=1}^{k} A^{\otimes \lambda_i}, A^{\otimes k} \right) \right), \partial, * \right)$$

C'est un isomorphisme si A est de dimension finie en chaque degré

On considère la version courbée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{cnec}k_A & & \mathrm{cdPois}_A \\ \cong \downarrow & \swarrow & \\ \mathrm{hlh}_A & & \end{array}$$

courbées

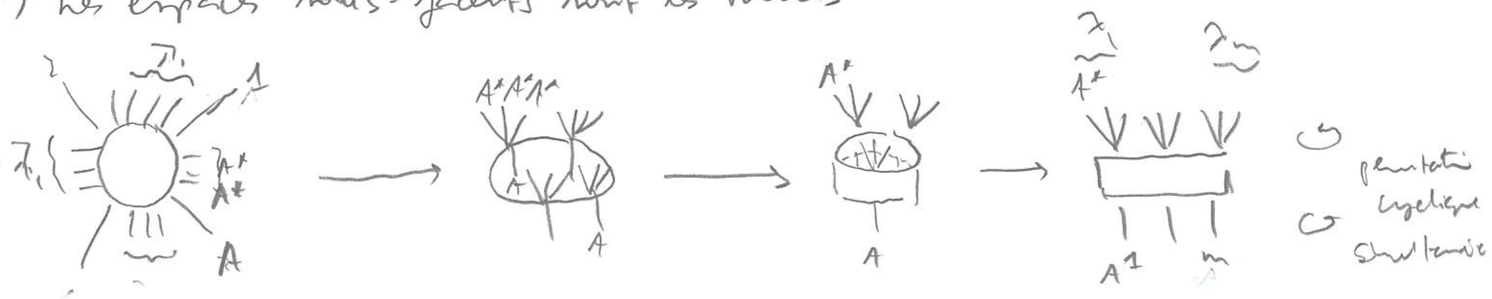
[on ajoute la courbure ; suivant le motto : "l'unité est la duale de Koszul de la courbure" ; cela revient à considérer versions unitaires de As et DPois]

THM [Leray-Vallette] Les alg. Lie-admissible cdPois_A et hlh_A sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes.

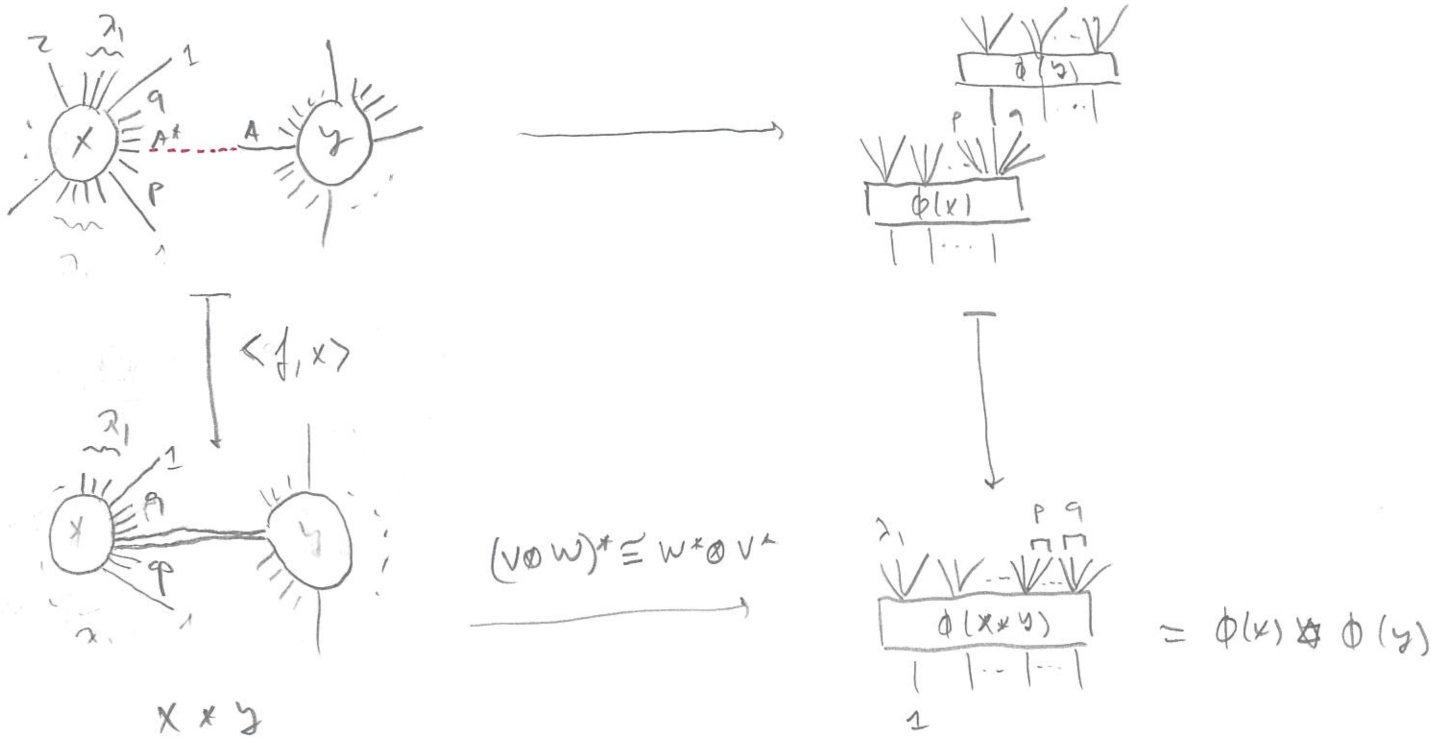
Corollaire : Lorsque A est de dim finie en chaque degré,
« Toute pré-Calabi-Yau (courbée) admet une structure dble Poisson courbée à homotopie près »

démo : par dessins.

1) Les espaces sous-jacents sont les mêmes



2) Les produits admissibles sont envoyés l'un sur l'autre.



$\square$