Objectif $\quad \mathrm{preCY}/A \underset{\iota_{G}}{\rightsquigarrow}$ Poissons sur $[\mathrm{Spec}A_V/G_V]$ en structure NC ??

$A = T_{kQ_0}(kQ_1)$ dga $\quad Q = (Q_0, Q_1)$ carquois gradué

$\frac{1}{2}$ libre sur carquois gradué

$a : x \to y$ a un degré

$kQ_0 = \text{"}B\text{"} = \bigoplus_{x=1}^{m} k e_x$

$\vec{n} \in \mathbb{N}^I$ $\vec{\dim}$, $V = (V_i)$ de dim $\vec{n}$

$$A_{\vec{n}} = A_V = k[\, a_{ij} \mid a : x \to y \in Q_1 \quad {1 \le i \le n_x \atop 1 \le j \le n_y} \,] \Big/ \begin{array}{c} (ab)_{ij} = a_{ik} b_{kl} \\ + \text{ rel's issues de la différentielle} \end{array}$$

$$X = \mathrm{dRep}(A, \vec{n}) = \left[\mathrm{Spec}(A_{\vec{n}}) / GL_{\vec{n}} \right]$$

ex ?

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop left, "t"] \arrow[r, bend left, "a"] & y \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[loop right, "t'"] \end{tikzcd}$$

$\partial(t) = aba$

$\partial(t') = ab$

$\partial(t_{ij}) = (ba)_{ij}$

$i, j \le n_x$

$G_2(kQ)$

$Q = \bullet \to \bullet$

$\wr$ drep

$T^* \mathrm{drep}(kQ, \vec{n})$

$\omega = Db \otimes Da$

§ Foncteur de Van den Bergh

Def $\quad (-)^{ab}_V : \mathrm{dgMod}(A^e) \longrightarrow \mathrm{dgMod}(A_V)$

$$M \longmapsto M \otimes_{A^e} (\underline{\mathrm{End}} V \otimes A_V)$$

En fait paire adjointe $\quad \longleftarrow \quad \mathrm{End}V \otimes -$

. <u>unité</u> $\quad \phi_A : M \to \mathrm{End}V \otimes M^{ab}_V$

$\xi \in e_y M e_x \qquad v_\bullet, w_\bullet$ bases de V_x, V_y

$$\phi_A(\xi) = (\xi_{ij})_{v_\bullet, w_\bullet}$$

- $(T_A M)_V \simeq \mathrm{Sym}_{A_V}(M^{ab}_V) \rightsquigarrow M^{ab}_V \in \mathrm{dgMod}_{GL_V}(A_V)$

- $(\Omega^1 A)^{ab}_V = \Omega^1_{com} A_V$ et si $D : A_V \to \Omega^1 A_V$ dériv univ

$$(Df)_{ij} = D(f_{ij})$$

- trace $\quad tr : M_\natural \longrightarrow (M_V^{ab})^{GL_V} \qquad (tr \circ \phi_A)$
- structure monoïdale

$$\exists \quad (M \otimes_A N)_V^{ab} \longrightarrow M_V^{ab} \otimes_{A_V} N_V^{ab}$$

- multitrace $\quad tr : (M_n \otimes_A \cdots \otimes_A M_1)_\natural \longrightarrow (M_{n V}^{ab} \otimes_{A_V} \cdots \otimes_{A_V} M_{1V}^{ab})^{GL_V}$

$$\begin{tikzcd}
(M_n \otimes_A \cdots \otimes_A M_1)_\natural \arrow[rr] \arrow[dr] & & (M_{nV}^{ab} \otimes_{A_V} \cdots \otimes_{A_V} M_{1V}^{ab})^{GL_V} \\
& ((M_n \otimes_A \cdots \otimes_A M_1)_V^{ab})^{GL_V} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\xi_n \cdots \xi_1 \longmapsto \sum_{\underline{i}} (\xi_n)_{i_1 i_n} \otimes \cdots \otimes (\xi_1)_{i_2 i_1}$$

- trace + T $\qquad T_A(M)_\natural \longrightarrow \mathrm{Sym}_{A_V}(M_V^{ab})^{GL_V}$

naturalisation %. $T_A(M)$

se décompose en $\quad (M^{(n)})_{\natural, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_{A_V}(M_V^{ab})^{GL_V}$

issue de

$$\hookrightarrow \quad (M^{(n)})_\natural \xrightarrow{\text{multitr}} (M_V^{ab} \otimes_{A_V} \cdots \otimes_{A_V} M_V^{ab})$$

- <u>DUALITÉ</u>

$$\exists \psi \quad ((M_n \cdots M_1)^\vee)_V^{ab} \longrightarrow ((M_n)_V^{ab} \cdots (M_1)_V^{ab})^{GL_V}$$

A_V-dgMod

"multidual" $\langle -, \ldots, - \rangle$ $\quad z \to z'$

$\lambda_{z'} \in V_{z'}^*$
$v_z \in V_z$
$a \in A_V$

$\xi_i \in e_{y_i} M e_{x_i}$
$\lambda_{y_i} \in V_{y_i}^*$
$v_{x_i} \in V_{x_i}$

$$\langle \xi_n, \ldots, \xi_1 \rangle \in e_{z'} A e_{x_n} \otimes e_{y_n} A e_{x_{n-1}} \otimes \cdots \otimes e_{y_2} A e_{x_1} \otimes e_{y_1} A e_z \in A^{\otimes n+1}$$

~~avec $\forall$ $\mathrm{End}\,V \otimes A \to A_V$ dual~~

Comme $A_V \to \mathrm{End}\,V \otimes A_V$ se dualise en $V_y^* \otimes_y A \otimes_x V_x \to A_V$

on utilise multiplication sur $A_V^{\otimes n+1}$ pour décrire ψ.

De même,

$\exists\, tr^\vee : (M_n \dots M_1)^\vee_q \to \left(\left((M_n)^{ab}_\vee \dots (M_1)^{ab}_\vee\right)^\vee\right)^{GL_\vee}$

entre complexes

$n=1$ suffit grâce aux "graftings" $M_n^\vee \otimes \dots \otimes M_1^\vee \to (M_n \dots M_1)^\vee$

et $(M^\vee)^{ab}_\vee \to (M^{ab}_\vee)^\vee$

$(\xi^\vee)_{ij} \mapsto (\xi_{ji})^\vee$

§ <u>formes diff</u> : $X = [\operatorname{Spec} B / G]$ $\quad \left(\begin{array}{l} B = A_\vee \\ G = GL_\vee \end{array}\right)$

<u>Def</u> : dg module de 1-formes de Cartan

$\Omega^1_{Car}(g^*, B)[1] := \operatorname{cone}\left(\Omega^1(B) \xrightarrow{\alpha} B \otimes g^*\right)$

α dual de l'act° infinitésimale $g \to \operatorname{Der} B$.

$\rightsquigarrow$ p-formes $\Omega^p_{Car}(g^*, B)[p] := \operatorname{Sym}^p_B(\Omega^1_{Car}(g^*, B)[1])$

Vers ~~Diff de~~ de Rham G-eq ?

<u>Déf</u>
- sur B : $\cancel{s}D[1] : B \xrightarrow{\text{deg } 1} \Omega^1_{com} B[1] \subseteq \Omega^1_{Car}(g^*, B)[1]$
- on pose $\cancel{s}D[1](\underset{B \otimes g^*}{\underset{\cap}{1 \otimes \xi}}) = 0$, $\quad D[1]^2 = 0$

⚠ $[\cancel{s}D[1], d] \neq 0$

d : intrinsèque à Sym

$\|$

$\iota : \operatorname{Sym}^p_B(\Omega^1_{com}(B)[1]) \otimes_k \operatorname{Sym}^q_k(g^*) \to \operatorname{Sym}^p_B(\Omega^1_{com}(B)[1]) \otimes_k \operatorname{Sym}^{q+1}_k(g^*)$

$\omega \otimes \lambda \mapsto \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{\underbrace{e_i}_{\text{base de } g}}(\omega) \otimes (\underbrace{\phi^i}_{\text{duale}} \lambda)$

Lemme : 0 sur la partie G-inv.

dem ~~[illegible]~~

$$I\underset{\substack{\uparrow\\ G\text{-inv}}}{(\omega\otimes\lambda)} = -\sum_{i=1}^{n} \omega\otimes\phi^i . ad^*_{e_i}(\lambda)$$

& $\lambda \mapsto \sum \phi^i . ad^*_{e_i}(\lambda)$ dérivation sur Sym $\mathfrak{g}^*$,
nulle sur $\mathfrak{g}^*$ □

⇒ $\varepsilon D[1]$ descend, sur $\mathcal{A}^p(X)[p] = \Omega^p_{Car}(\mathfrak{g}^*, B)^G[p]$.
structure mixte

↑ B cofib

$\mathbb{L}_X \simeq \Omega^1_{Car}(\mathfrak{g}^*, B)$

$\Gamma(X, \mathrm{Sym}^p_X \mathbb{L}_X[1])$

cf 4.59
($\coprod_{n\geq 0} \Omega^n_{Car}(\mathfrak{g}^*, B)^G[n]u^n$, $d_{dR} = d + D[1]$)

$f \in e_y A e_x$

Lien avec ce qui précède : $Df \mapsto f\otimes e_x - e_y \otimes f = f\underset{\substack{\uparrow\\ \text{jauge } e_x\otimes e_x}}{E_x} - E_y f$

rappel (?) $\mathrm{Res}\,A = \mathrm{cone}(\Omega^1 A \to A\otimes A)$

$\rightsquigarrow (\mathrm{Res}\,A)^{ab}_V = \mathrm{cone}\left((\Omega^1 A)^{ab}_V \xrightarrow{\alpha_V} (A\otimes A)_V\right)$

$\Omega^1_{com}(A_V)$

$Df_{ij} \mapsto \sum f_{ie}(E_x)_{ej} - (E_y)_{ie} f_{ej}$

dual de $\mathfrak{gl}_V \to \mathrm{Der}\,A_V$ ($(E_x)_{ij} \in \mathfrak{gl}_V^* : M \in \mathfrak{gl}^{V_x} \mapsto M_{ij}$)

⇒ Prop $(\mathrm{Res}\,A)^{ab}_V \simeq \Omega^1_{Car}(\mathfrak{gl}_V^*, A_V)[1]$

§ champs de polyv⃗ $\quad B = A_V$, $G = GL_V$

Déf : • dg-mod des pré-champs de p-vecteurs de Cartan m-décalés

$\Pi^{n}(\mathfrak{g}^*, B, m) = \mathrm{Hom}_B((\Omega^1_{Car}(\mathfrak{g}^*, B)[m+1])^{\otimes_B n}, B)_{\mathfrak{S}_n}$

• complexe de champs de p-vecteurs de Cartan m-décalés globaux

$\mathcal{X}^{(n)}_{Car}(\mathfrak{g}^*, B, m) := \Pi^n(\mathfrak{g}^*, B, m)^G$

⇒ $\mathcal{X}^{\bullet}_{Car}(\mathfrak{g}^*, B, m) = \mathrm{Sym}^{\bullet}_B(\Omega^1_{Car}(\mathfrak{g}^*; B)[m+1])^G$

B semi libre sur $\{f_a\}_{a\in I}$

$\Omega^1_{\mathrm{Car}}(\mathfrak{g}^*, B)$ —— $\{Df_a\} \cup \{s^{-1}\theta_i^*[-1]\}_{i\in J}$

base de $\mathfrak{g}^*$

ma base $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in I\cup J}$ de $\Omega^1_{\mathrm{Car}}(\mathfrak{g}^*, B)[m+1]$

$$\Rightarrow \quad \Pi^n(\mathfrak{g}^*, B, m) = \prod_{(\alpha_1\dots\alpha_n)\in(I\cup J)^n/\mathfrak{S}_n} B\cdot \xi^\vee_{\alpha_n}\cdots\xi^\vee_{\alpha_1}$$

<u>Def</u> structure de Poisson graduée sur $\mathrm{Sym}^\vee_B\left(\Omega^1_{\mathrm{Car}}(\mathfrak{g}^*, B)[m+1]\right)$
$\{-,-\}$ de degré $m+1$:

$$\left(\begin{array}{l} \{f_a, f_b\} = 0 \\ \{(Df_a)^\vee[-m-1], (Df_b)^\vee[-m-1]\} = 0 \\ \{-, \theta[-m]\} = 0 \end{array}\right)$$

$$\{f_a, s^{-m-1}(Df_b)^\vee\cancel{[-m-1]}\} = \delta_{ab}$$

<u>Prop</u> $\{-,-\}$ d-fermée sur les G-inv.

<u>dem</u> : vrai sur la ssdga com. $\mathrm{Sym}^\vee_B(\Omega^1(B)[m+1])$

soit $\{\eta,\xi\}' := d\{\eta,\xi\} - (-1)^{m+1}\{d\eta,\xi\} - (-1)^{m+1+|\eta|}\{\eta, d\xi\}$

$\rightsquigarrow = 0$? ok sur $\mathrm{Sym}^\vee_B(\Omega^1(B)[m+1])$ & $\mathrm{Sym}_k(\mathfrak{g}[-m])$

si $\eta \in$ & $\theta \in \mathfrak{g}[-m]$ $\qquad \alpha, \beta \in$

ξ

$$\{\eta, \theta\}' = L_{\varphi(\theta)}(\eta)$$

$\in \mathrm{Der}(B)$ induit par $G \curvearrowright B$

$$\{\eta\otimes\alpha, \xi\otimes\beta\}' = \pm\, \eta\underbrace{\{\alpha, \xi\otimes\beta\}'}_{} \pm \{\eta\otimes\alpha, \beta\}'\xi$$

$\left(\left(\alpha = s^{-mp}\theta_1\dots\theta_p\,\cancel{[-mp]}\right)\right.$

$$\sum_i \pm\, L_{\varphi(\theta_i)}(\xi) \otimes \beta\, s^{-m(p-1)}\theta_1\dots\hat\theta_i\dots\theta_p\, \cancel{[-m(p-1)]}$$

$\xi\otimes\beta$ G-inv

$$= \sum_i \pm\, \xi\otimes[\theta_i, \beta]\cdot\theta_1 \dots$$

$$= \xi\otimes[\alpha,\beta]$$

Poisson induit par Lie sur $\mathfrak{g}$

$(\dots)$ ✓

$\Rightarrow$ $(m+1)$-shifted Poisson structure sur

$$\mathrm{Sym}^{\cdot}_{B}(\Omega^1_{can}(\mathfrak{g}^*,B)[m+1])^{G} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{X}^{(n)}_{can}(\mathfrak{g}^*,B,m)$$
$$=: \mathcal{X}^{\circ}_{can}(\mathfrak{g}^*,B,m)$$

$\rightsquigarrow$ Def Une Poisson structure m-décalée sur $X = [\mathrm{Spec}\, B/G]$ est un MC elt dans la dglie a $F^2\hat{\mathcal{X}}_{can}(\mathfrak{g}^*,B,m)[m+1]$

$$\left(\hat{\mathcal{X}}_{can} = \prod_{n\geq 0} \mathcal{X}^{(n)}_{can}(\mathfrak{g},B,m)[m+1] \right)$$

Lie structure vient de Poisson.

Thm il existe une morph can de DG Lie Alg

ext necklace DGLie alg $\quad \mathcal{X}^{\circ}_{\diamond}(A,m)[m+1] \longrightarrow \mathcal{X}^{\circ}_{can}(\mathfrak{gl}_V^*, A_V, m)[m+1]$

induit par la trace

dem multitrace duale $M_1 = \dots = M_n = \mathrm{Res}\,A[m]$

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Res}A[m] \cdots \mathrm{Res}A[m])^{\vee}_{G} \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ \text{coinv}"'] & ((\mathrm{Res}A[m]^{ab}_{V} \cdots)^{\vee}_{G})^{GL_V} \\
 & \Omega^1_{can}(\mathfrak{gl}_V^* A_V) \arrow[u, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[d] \\
\mathcal{X}^{\circ}_{\diamond}(A,m) \arrow[r] & \mathcal{X}^{\circ}_{can}(\cancel{*}\ \mathfrak{gl}_V^*, A_V, m)
\end{tikzcd}$$

préserver les $\{-,-\}$ (cf Johan)

Corollaire en prenant les MC

n-preCY sur A $\longmapsto$ $(2-n)$-décalées Poisson sur X