

# WORKSHOP DOUBLE POISSON ALPIN — PLANNING PRÉVISIONNEL

DAMIEN CALAQUE, JOHAN LERAY, AND BRUNO VALLETTE

*du 25 au 29 mai 2021*

*Villaroger*

## ORGANISATION

### *Participants*

- Tristan BOZEC
- Damien CALAQUE
- Ricardo CAMPOS
- Albin GRATALOUP
- Corina KELLER
- Guillaume LAPLANTE-ANFOSSI
- Johan LERAY
- Thibaut MAZUIR
- Anne MOREAU
- Joost NUITEN
- Victor ROCA-LUCIO
- Sarah SCHEROTZKE (?)
- Nicolo SIBILLA (?)
- Pelle STEFFENS
- Bruno VALLETTE

### *Planning prévisionnel*

	25/05	26/05	27/05	28/05
8h30	Exposé 0	Exposé 3	Exposé 6	Exposé 10
10h	☕	☕	☕	☕
10h30	Exposé 1	Exposé 4	Exposé 7	Exposé 11
12h	Déjeuner	Déjeuner	Déjeuner	Déjeuner
	Discussions	Discussions	Discussions	Discussions
17h00	Exposé 2	Exposé 5	Exposé 8	Exposé 12
18h30			Exposé 9	
19h00				
19h30	Diner	Diner	Diner	Diner
20h30	Discussions 🍷	Discussions 🍷	Discussions 🍷	Discussions 🍷

## PROGRAMME SCIENTIFIQUE

Commençons par citer la page Web de Maxime Fairon [Fai] qui référence un certain nombre d'articles traitant de double crochets. La plupart des articles cités ci-dessous y sont référencés.

**Exposé 0 — Exposé de survol — Orateur : Damien**

## EXPOSÉS INTRODUCTIFS

On se propose d'attribuer les exposés 1 et 2 à un premier binôme, et les exposés 3 et 4 à un second ; charge à chaque binôme de se répartir le contenu, le découpage présenté ici n'étant qu'indicatif.

- Exposés 1 et 2 – Orateur et oratrice : Victor et Anne
- Exposés 3 et 4 – Orateur et oratrice : Thibaut et Corina

**Exposé 1 — Schémas de représentations – Orateur : Victor**

Introduction à la géométrie non commutative via les schémas de représentations : dérivations doubles, complexe de Karoubi-de Rham, calcul différentiel non-commutatif ; schémas de représentations, morphisme d'évaluation.

## RÉFÉRENCES.

- Sections 2, 3, 6 et 11 de [CEG05]
- Voir aussi les sections 10–13,19 de [Gin05]

**Exposé 2 — Structures bi-symplectiques — Oratrice : Anne**

Définition des structures bi-symplectiques, et surtout des exemples. Il faudra montrer que la condition de non-dégénérescence de la 2-forme noncommutative implique la non-dégénérescence de la 2-forme induite sur les schémas de représentations. Il faudra aussi introduire le cotangent noncommutatif, et parler de l'algèbre préprojective.

## RÉFÉRENCES.

- Sections 5, 7–10 de [CEG05]
- Sections 14 et 15 de [Gin05] (consulter aussi [Gin00]).

**Exposé 3 — Structures double Poisson — Orateur : Thibaut**

Le but de cet exposé est de présenter la définition d'algèbre double Poisson et ses premières propriétés. On cherchera à montrer que la structure induite sur les schémas de représentations est un crochet de Poisson. Il faudrait faire le lien avec les structures bi-symplectiques.

## RÉFÉRENCES.

- Bien évidemment, on s'appuyera sur l'article initial de Van den Bergh [VdB08] (comparer avec [CB11]).
- [ORS13] et [Sok13] pour des premiers exemples motivés par des systèmes intégrables non commutatifs;

**Exposé 4 — Modifications de la structure double Poisson — Orateur : Damien, à l'aide des notes gentiment préparées par Corina**

Cet exposé est la suite directe du précédent. On considère des variantes des double-crochets de Poisson, comme les structures quasi-double Poisson (il faudra faire l'analogie avec les structures quasi-Poisson existant dans le monde commutatif). On pourra insister sur les procédures de fusion et de réduction pour les quasi-double Poisson, ainsi que sur les exemples qui viennent des variétés de carquois.

RÉFÉRENCES. On pourra suivre les références suivantes :

- Pour les quasi double Poisson : l'article initial de Van den Bergh [VdB08]
- les articles de Fairon, comme [Fai20]

APPROFONDISSEMENT 1 – TOPOLOGIE DES CORDES

Les orateurs pour cet approfondissement seront **Ricardo, Joost et Bruno**. La répartition des exposés ainsi que le contenu de certains sont laissés à leur discrétion.

**Exposé 5 — Les travaux de Massuyeau–Turaev en dimension 2 — Orateur surprise 1**

Apparition des double-crochets en topologie des cordes : Massuyeau et Turaev construisent un double crochet d'intersection (lié au crochet de Goldman) agissant sur les lacets pointés d'une variété à bord  $M$  pointée sur son bord. (lien avec le crochet de Chas–Sullivan)

RÉFÉRENCES. — Le cas des surfaces orientées : [MT14]

- On peut également citer des travaux plus algébriques : [MT15] et [Tur14] .

REMARQUE. L'orateur en charge de cet exposé devra communiquer avec Corina, oratrice de l'exposé 4, car ce thème d'approfondissement utilise la notion de structure quasi-double Poisson.

**Exposé 6 — MT en  $\dim > 2$  OU Kashiwara–Vergne 1 — Orateur surprise 2**

Contenu surprise 1

**Exposé 7 — MT en  $\dim > 2$  OU Kashiwara–Vergne 2 — Orateur surprise 3**

Contenu surprise 2

Pour ces deux exposés, les orateurs choisiront d'aborder

- ou bien les travaux de Massuyeau–Turaev en dimension plus grande que 2 (ref [MT13]) ;
- ou bien les travaux d'Alekseev et ses coauteurs autour du problème de Kashiwara–Vergne (ref [AKKN17, AKKN18b, AKKN18a])

## APPROFONDISSEMENT 2 — VERS LA GÉOMÉTRIE DÉRIVÉE, HOMOTOPIQUE

*Sous-thème 1 — Schémas de représentations dérivés*

REMARQUE. Les exposés 8 et 9 ne devront durer qu’au maximum 1h10, en raison du planning. Ils auront lieu le mercredi de 17h à 19h30, avec une courte pause de 10 minutes entre les deux exposés.

**Exposé 8 — Schémas de représentations dérivés 1 — Orateur : Albin**

Travaux de Berest et ses co-auteurs sur les schémas de représentations dérivés.

RÉFÉRENCES. On pourra suivre les références suivantes

- On suivra principalement l’article où est définie la notion de schéma de représentations dérivé [BKR13]
- L’article de survol [BFR14]

**Exposé 9 — Schémas de représentation dérivés 2 : structure double Poisson — Orateur : Pelle**

RÉFÉRENCES. On pourra suivre les références suivantes

- L’article de survol [BFR14]
- On pourra également regarder [BCER12] où il est question de structures de Poisson non-commutatives dérivées
- Un autre exemple de structure double Poisson est fourni par [CHSY15] où est faite la construction d’un double crochet en lien avec une catégorie de Fukaya

*Sous-thème 2 — Structures (pré-)Calabi-Yau*

On présentera la définition d’algèbre (pré-)Calabi-Yau et on montrera qu’une algèbre double Poisson est un exemple d’algèbre pré-Calabi-Yau. Yeung montre également qu’une structure pré-Calabi-Yau sur une dg-catégorie  $\mathcal{A}$  induit une structure de Poisson sur son schéma de représentations. Dans le cas Calabi-Yau, Toën et Brav-Dyckerhoff ont montré que l’espace de module des objets hérite d’une structure symplectique décalée Calabi-Yau (+version relative). À propos des catégories Calabi-Yau, on pourra donner l’exemple des complétions Calabi-Yau, ou dg-algèbres de Ginzburg, qui sont une version dérivée des algèbres préprojectives.

**Exposé 10 — Structure Calabi-Yau, pre-Calabi-Yau, lien avec double Poisson — Orateur : Johan**

RÉFÉRENCES.

- Les articles de Iyudu, Kontsevich et Vlassopoulos [IK18, IK19, IKV19, IK20], pour les algèbres pré-Calabi-Yau.
- Les articles de Fernández-Herscovich [FH19, FH20], pour le lien entre double Poisson et pré-Calabi-Yau.

**Exposé 11 — Structure (pre-)Calabi-Yau, espace de représentations — Orateur : Tristan**

Pour cet exposé, on se concentrera sur deux résultats de l’article de Yeung.

- les structures pre-Calabi-Yau induisent des structures de Poisson décalé sur les espaces de modules de représentations ;

— l'équivalence entre structures pre-Calabi-Yau non-dégénérées et structures Calabi-Yau.

L'orateur tachera de tout faire dans le cadre des dg-algèbres (et non pas dans le cadre de dg-catégories)

RÉFÉRENCES.

— L'article de Yeung [Yeu18]

## Exposé 12 — Homotopy double Poisson et algèbre pre-Calabi-Yau — Orateur : Guillaume

Une approche propéradique des algèbres double Poisson permet de définir une bonne notion d'algèbre double Poisson à homotopie près. On présentera cette notion et on fera le lien avec les algèbres pré-Calabi-Yau.

RÉFÉRENCES.

— Un super article qui n'est pas encore fini ;) *Homotopy double Poisson gebras*.

— On admettra le résultat de la Koszulité de la propéradé  $\mathcal{DPois}$  (cf [Ler20] pour le résultat).

— [Val03, Val07, MV09a, MV09b] pour les propéradés et [HLV20] pour les gèbres et les  $\infty$ -morphisms.

REMARQUE. Cet exposé est lié à l'exposé 10 : il faudra discuter avec Johan.

## REFERENCES

- [AKKN17] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(2):123–127, 2017.
- [AKKN18a] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. Goldman-turaev formality implies kashiwara-vergne. *arXiv preprint arXiv:1812.01159*, 2018.
- [AKKN18b] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. The goldman-turaev lie bialgebra and the kashiwara-vergne problem in higher genera. *arXiv preprint arXiv:1804.09566*, 2018.
- [BCER12] Yuri Berest, Xiaojun Chen, Farkhod Eshmatov, and Ajay Ramadoss. Noncommutative Poisson structures, derived representation schemes and Calabi-Yau algebras. In *Mathematical aspects of quantization*, volume 583 of *Contemp. Math.*, pages 219–246. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- [BFR14] Yuri Berest, Giovanni Felder, and Ajay Ramadoss. Derived representation schemes and noncommutative geometry. In *Expository lectures on representation theory*, volume 607 of *Contemp. Math.*, pages 113–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [BKR13] Yuri Berest, George Khachatryan, and Ajay Ramadoss. Derived representation schemes and cyclic homology. *Adv. Math.*, 245:625–689, 2013.
- [CB11] William Crawley-Boevey. Poisson structures on moduli spaces of representations. *J. Algebra*, 325:205–215, 2011.
- [CEG05] W. Crawley-Boevey, P. Etingof, and V. Ginzburg. Noncommutative Geometry and Quiver algebras. *ArXiv Mathematics e-prints*, February 2005.
- [CHSY15] X. Chen, H.-L. Her, S. Sun, and X. Yang. A double Poisson algebra structure on Fukaya categories. *Journal of Geometry and Physics*, 98:57–76, December 2015.
- [Fai] Maxime Fairon. Double brackets in mathematics. <https://www.maths.gla.ac.uk/~mfairon/DoubleBrackets.html>.
- [Fai20] Maxime Fairon. Double quasi-poisson brackets: fusion and new examples. *Algebras and Representation Theory*, pages 1–48, 2020.
- [FH19] David Fernández and Estanislao Herscovich. Cyclic  $A_\infty$ -algebras and double Poisson algebras. *arXiv preprint arXiv:1902.00787*, 2019.

- [FH20] David Fernández and Estanislao Herscovich. Double quasi-Poisson algebras are pre-Calabi-Yau. *arXiv preprint arXiv:2002.10495*, 2020.
- [Gin00] Victor Ginzburg. Non-commutative symplectic geometry, quiver varieties, and operads. *arXiv preprint math/0005165*, 2000.
- [Gin05] V. Ginzburg. Lectures on Noncommutative Geometry. *ArXiv Mathematics e-prints*, June 2005.
- [HLV20] Eric Hoffbeck, Johan Leray, and Bruno Vallette. Properadic Homotopical Calculus. *International Mathematics Research Notices*, 05 2020. rnaa091.
- [IK18] Natalia Iyudu and Maxim Kontsevich. Pre-Calabi-Yau algebras as noncommutative poisson structures. *IHES Prepublication*, 2018.
- [IK19] Natalia Iyudu and Maxim Kontsevich. Pre-Calabi-Yau algebras and  $\xi\theta$ -calculus on higher cyclic hochschild cohomology. *IHES Prepublication*, 2019.
- [IK20] Natalia Iyudu and Maxim Kontsevich. Pre-calabi-yau algebras and noncommutative calculus on higher cyclic hochschild cohomology, 2020.
- [IKV19] Natalia Iyudu, Maxim Kontsevich, and Yannis Vlassopoulos. Pre-calabi-yau algebras and double poisson brackets. *arXiv preprint arXiv:1906.07134*, 2019.
- [Ler20] Johan Leray. Protooperads II: Koszul duality. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, 7:897–941, 2020.
- [MT13] G. Massuyeau and V. Turaev. Brackets in the Pontryagin algebras of manifolds. *ArXiv e-prints*, August 2013.
- [MT14] Gwénaél Massuyeau and Vladimir Turaev. Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1):1–64, 2014.
- [MT15] Gwénaél Massuyeau and Vladimir Turaev. Brackets in representation algebras of hopf algebras. *arXiv preprint arXiv:1508.07566*, 2015.
- [MV09a] Sergei Merkulov and Bruno Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. I. *J. Reine Angew. Math.*, 634:51–106, 2009.
- [MV09b] Sergei Merkulov and Bruno Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. II. *J. Reine Angew. Math.*, 636:123–174, 2009.
- [ORS13] Alexander Odesskii, Vladimir Rubtsov, and Vladimir Sokolov. Double Poisson brackets on free associative algebras. In *Noncommutative birational geometry, representations and combinatorics*, volume 592 of *Contemp. Math.*, pages 225–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [Sok13] V. V. Sokolov. Classification of constant solutions of the associative Yang-Baxter equation on  $\text{Mat}_3$ . *Theoret. and Math. Phys.*, 176(3):1156–1162, 2013. Russian version appears in *Teoret. Mat. Fiz.* 176(2013), no. 3, 385–392.
- [Tur14] Vladimir Turaev. Poisson–gerstenhaber brackets in representation algebras. *Journal of Algebra*, 402:435–478, 2014.
- [Val03] Bruno Vallette. *Dualité de Koszul des PROPs*. Prépublication de l’Institut de Recherche Mathématique Avancée [Prepublication of the Institute of Advanced Mathematical Research], 2003/30. Université Louis Pasteur, Département de Mathématique, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 2003. Dissertation, Université de Strasbourg I, Strasbourg, 2003.
- [Val07] Bruno Vallette. A Koszul duality for PROPs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(10):4865–4943, 2007.
- [VdB08] Michel Van den Bergh. Double Poisson algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(11):5711–5769, 2008.
- [Yeu18] Wai-kit Yeung. Weak Calabi-Yau structures and moduli of representations. *arXiv preprint arXiv:1802.05398*, 2018.

*Email address:* damien.calaque@umontpellier.fr

*Email address:* leray@math.univ-paris13.fr

*Email address:* vallette@math.univ-paris13.fr